加重相乗平均の加重相加平均による近似 ～関数電卓なしに実効為替レートは近似計算可能か～

小川　　健†

概要

本稿では関数電卓なしでの実効為替レートの近似計算公式を裏付けるために、加重相乗平均を加重相加平均で近似計算許容可能かどうかを検証する。本手法が成立すれば GDP の平均成長率など経済学の多くで必要となる（加重の）相乗平均に対し通常の電卓で計算可能な（加重の）相加平均で近似計算が可能になり、殆ど関数電卓を持っていない中堅私大以下の低学年においても経済学の通常の小テスト及び定期試験での座学による計算問題の可能性が広がる。近似では自然対数のテイラー展開を利用した線形近似、つまり $x≒1$ のとき $\ln(x)≒x-1$ の適用範囲に落とし込んで計算を行う。なおこの近似は本来、1 次同次のコブ=ダグラス型関数に相当する加重相乗平均を、多変数関数と見なした時のテイラー展開を利用した線形近似で直ちに導出できるものである。検証の結果、この近似公式による誤差はかなり大きく見積もっても、1 から最大で小数第 n 位以内のずれに対しおよそ小数第 $2n$ 位までの誤差に収められることが分かった。これは高々数%以内のずれが多い数値例に対し、少なくとも教育上は加重相乗平均が加重相加平均で近似計算可能であることを意味する。

キーワード：加重相乗平均、加重相加平均、自然対数の線形近似、実効為替レート
JEL 分類：A22, C02, F31

1. はじめに

中堅以下の私立大学の経済学系学部の多くでは理系と異なり、関数電卓を使いそうな統計学などが必須にできない場合が多く、1-2 年生の学生の多くが関数電卓・グラフ電卓を持っていないだけでなく、（金銭的な事情から）試験のためだけに買う事を強制するのも難しい。従って、彼らに座学での講義科目において小テストや定期試験問題に計算問題を課す場合、通常の電卓で計算可能な範囲に制限しないと事実上出題できない事情がある。

しかし、国際金融における実効為替レートは、国会での日銀総裁が出席する討論の中でも取

† 専修大学・経済学部（国際経済学科）・講師、社会科学研究所所属　mailto: takeshi.ogawa.123 “at” gmail.com
〒214-8580 神奈川県川崎市多摩区東三田二丁目 1 番 1 号 専修大学・生田校舎 9 号館 7 階 9710 号室

り上げられる位重要なもので（例えば[1]を参照）、実際に仕組みだけでも近似的に計算できるようにする重要性は高い。ここで実効為替レートとは、本来2通貨間での相対価値でしかない外国為替レートを加重相乗平均することで､その通貨の特定期間における価値の変動を表す(例えば[4]を参照)。そのため、実効為替レートの計算には非整数の指数計算が必要で、本質的に関数電卓を必要としていた。また、非整数の指数乗を扱う指数関数は、平成21年11月の高校数学の学習指導要領解説（平成24年6月更新版）において数IIに組み入れられている（詳しくは[2]を参照)。そのため、高校までの授業カリキュラム上も数Iや数Aまでに留まる事も多い文系の出身者も多数を占める(中堅以下の私立大学を中心とした)経済学系の学部において、非整数の指数乗は大学の経済数学などで初めて扱う概念になる場合も少なくない。近似的に幾つになるかの数値計算を手計算で行うことは事実上要求できない。そのようなこともあって、計算問題を定期試験や小テスト等で出題できない状況が続いていた。現に国際金融の入門的なテキストで実効為替レートに関する説明は文章による説明に留まっているものもあり、計算式を示していないものもあるが（例えば[3]を参照)、これは計算練習の問題が出題し難い事情もあると考えられる。

近年、自然対数の線形近似、つまり$x \fallingdotseq 0$での

$$\ln(1+x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \fallingdotseq x,$$

を利用して、実効為替レートを関数電卓なくして近似計算する手法が教育系の学会報告などで登場してきた（例えば[5]を参照)。これは本質的には、加重相乗平均を加重相加平均で近似するものであり、この手法が浸透すれば定期試験や小テスト等でも実効為替レートを計算問題として出題可能になる。この手法は他にも、労使分配率が変わらない中で、集計的な収穫一定コブ＝ダグラス型生産関数を利用しての GDP 成長率を関数電卓なしに近似計算できるようになる、また、平均的な時給の離散時間における変化率など相乗平均は成長率・上昇率等の名前で時間変化率の平均に多く用いられるが、関数電卓が無い中では立方根（3 乗根）以上の計算を行うことは困難であり、これが相加平均で近似計算できれば学部の講義で扱える範囲も大きく広がる。このように、経済学では応用範囲の広いものである。

本稿では、自然対数の線形近似の適用範囲を見ることで、この近似計算が妥当性を持つことを示す。この手法が成立すれば、通常の電卓しか用意できない、ないし最悪電卓無しの状態で実効為替レートの計算などが可能になる。

本稿の構成は以下の通りである。第2節で時間変化率との対応関係を述べる。連続時間で対数微分により成立する項目が離散時間では少しずれるが、本質的には多変数関数の線形近似で導出ができることを確認する。第3節で検証する近似公式に関し、成立の別証を与えた上で有

効数字の議論を行う。第 4 節・第 5 節ではこの応用例として実効為替レートや平均上昇率の近似計算を取り上げる。この近似公式を入れることで、ずれが殆どないのに手計算ないし通常の電卓での計算が可能になる。第 6 節で議論を入れ、最終節で本稿のまとめとする。

2. Benchmark:時間変化率との対応関係

2.1 時間変化率との対応関係：連続時間の場合

総和が 1 の正の比重a_iに対し、$x_i \fallingdotseq 1$で加重相乗平均の（1 次同次のコブ＝ダグラス型）関数 $X := \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$ の時間変化率 $\frac{\dot{X}}{X}$ は対数微分を考えて $\ln(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i)$ から $\frac{\dot{X}}{X} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\dot{x}_i}{x_i}$ となる。これを基に、1 次同次のコブ＝ダグラス型関数を使える場合は各時間変化率の加重（相加）平均で求められる、と経済系の学部では教える。時間変化率は（GDP 等の）成長率を始め数多くの所で使われる。

2.2 時間変化率との対応関係：離散時間の場合

しかし、この議論が成立するのは本来（時間で微分ができる）連続時間の場合に限られる。経済学で連続時間以上に（学部では特に）離散時間つまり年や月のように期を区切って扱うものも多い。そのt期での $X_t := \prod_{i=1}^{n} x_{it}^{a_i}$ の時間変化率 $\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$ はa_iが時間tによらない場合でも、対応する近似計算 $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{x_{it} - x_{i,t-1}}{x_{i,t-1}}$ とは厳密には少しずれる。

例えば、t期の資本K_t、労働L_tから生産量Y_tが次の生産関数$Y_t = K_t^{0.277} L_t^{0.723}$で決まるとする。$t-1$期から$t$期に移るにつれて、資本$K_t$、労働$L_t$がそれぞれ 123⟹124、659⟹665 へと変化したとすれば、近似的に生産量の変化率は$0.277 \times \frac{124-123}{123} + 0.723 \times \frac{665-659}{659} = 0.00883473 \cdots$と計算できるが、本来の生産量の変化率は $\frac{124^{0.277} \cdot 665^{0.723} - 123^{0.277} \cdot 665^{0.723}}{123^{0.277} \cdot 665^{0.723}} = 0.00883463 \cdots$ となる。実際には殆ど変わらない（この例では有効数字上は全く同じ約 0.883%となる)。

2.3 多変数関数としての加重相乗平均の線形近似

本質的には多変数関数としての加重相乗平均を$x_i = 1$の周りでテイラー展開し、2 次以上の項を省略する線形近似

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \fallingdotseq 1 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(a_i \cdot 1^{a_i - 1} \prod_{j \neq i} 1^{a_j} \right) \cdot (x_i - 1) \right] = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

ですぐにこの近似公式は出せるものである。

しかし、（１）加重相加平均は通常の電卓や筆算で出せるが、加重相乗平均は非整数の指数乗が必要で、数値計算には関数電卓が必要になる。この数値計算上の違いが定期試験や小テスト等では出題できるかの観点で重要になるが、あまり考慮されていない。（２）成長率など「時間変化率」に限って等の議論が多く、同様の議論で出せる筈の「実効為替レート」等に殆ど使われていない。などの問題がある。そこでこの近似公式に関する有効数字の検証を行い、その上で応用例として幾つか取り上げる。

3. 検証する近似公式

3.1 検証する近似公式の形

検証する近似公式は$x_i \fallingdotseq 1$の際の以下の式である：

$$(X :=) \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i. \left(\sum_{i=1}^{n} a_i = 1, a_i > 0 \right)$$

この左辺が加重相乗平均であり、右辺が加重相加平均である。一般には両者の間には$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$,（等号成立条件は$x_i$が$i$によらない）が成り立つことが知られている[1]。$x_i$を1周辺に整える必要は無いが、経済学の実用上は1周辺が多いことに加え、最大と最小の相加平均などで両者を割って重み別に分けると、1 周辺に整えて一般性を失わないことが以下の式より確認できる。

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{2x_i}{\max_j \{x_j\} + \min_j \{x_j\}} \right)^{a_i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{2x_i}{\max_j \{x_j\} + \min_j \{x_j\}}.$$

今回の近似公式は自然対数による線形近似、つまり$x \fallingdotseq 0$における$\ln(1+x) \fallingdotseq x$を利用して示せる。そのため、この線形近似が有効数字上も妥当性を持つか検証する。$x \fallingdotseq 0$の範囲として$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} (= 0.5)$を仮定する。$x_i \fallingdotseq 1$の範囲はこれに併せて$\frac{1}{2} < x_i < \frac{3}{2}$とする。

3.2 近似公式が成立する別証の概要

この近似公式は対数関数の線形近似での別証がある。

---

[1] 証明は例えば[6]を参照。

$X \fallingdotseq 1$から$\ln(X)\ (\fallingdotseq 0)$は$\ln(X) \fallingdotseq X-1$となるので、

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln x_i \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - 1)$$

となるが、比重a_iの合計は 1 なので、この式は

$$\ln(X) \fallingdotseq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) - 1 \Leftrightarrow 1 + \ln X \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

と直せる。$X \fallingdotseq 1$から$1+\ln(X) \fallingdotseq X$なので成り立つ。(証明終わり)

3.3 利用する線形近似の誤差とは

$x \fallingdotseq 0$に相当する今回の$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$では、以下の議論から$-\frac{1}{3} < x, y < \frac{1}{2}$かつ$|x| < |y|$で、$x^2 \geq x - \ln(1+x) \geq 0$かつ$|x - \ln(1+x)| < |y - \ln(1+y)|$となる。

$$\frac{d}{dx}\{x - \ln(1+x)\} = -\frac{x}{1+x} \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow x \gtreqless 0, \quad \ln(1+0) = 0,$$

$$0^2 - \{0 - \ln(1+0)\} = 0, \quad \frac{d}{dx}[x^2 - \{x - \ln(1+x)\}] = \frac{x(2x+1)}{x+1} \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow x \lesseqgtr 0.$$

さて、境界では誤差の上限は次のようになる。

$x = 0.5$のとき：$0.5 - \ln(1+0.5) = 0.0945\cdots < 0.2,$

$x = -\frac{1}{2}$のとき：$-\frac{1}{2} - \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0.1931\cdots < 0.2,$

このため、$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$で$|x - \ln(1+x)| < 0.2$と分かった。

3.4 近似公式の有効数字の本来の議論とは

本来的に検証したい近似公式の有効数字の議論とは次のものである。真の値x_i, a_iを有効数字小数第m位までで近似した正の値をξ_i, α_iとする（$m = 0$では整数位)。簡単化のため$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$とし、$\max\{|x_i - \xi_i|, |a_i - \alpha_i|\} \leq \frac{1}{2 \cdot 10^m}$, と表現できる中で、$\left|\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right|$がどの範囲に抑えられるか、を考えることになる。容易に確認できることとして、三角不等式から

$$\left|\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right| \leq \left|\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| + \sum_{i=1}^{n} |a_i x_i - \alpha_i x_i| + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i x_i - \alpha_i \xi_i|,$$

となる。$\alpha_i (> 0)$は計 1 より$n \leq 10^m$で、通常10^mより十分小さい。加重相加平均の有効桁数に関する右辺第 2,3 項は

$$\sum_{i=1}^{n}\left|a_i x_i-\alpha_i x_i\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i x_i-\alpha_i \xi_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}\left|a_i-\alpha_i\right|\cdot\left|x_i\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_i\right|\cdot\left|x_i-\xi_i\right|$$
$$\le\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2\cdot 10^m}+\frac{1}{2\cdot 10^m}\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\frac{3n+2}{4\cdot 10^m}\left(<\frac{5}{4}\right),$$

となる。nは固定有限の自然数であるが、nは残る。

以降はnが残る原因となる比重a_iとα_iの違いを外し、$\alpha_i = a_i$の場合だけに絞って考える。α_iは全てa_iに置き換えられる。第 2 項部が消え、第 3 項部だけなら

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i x_i - a_i \xi_i| = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i - \xi_i| \le \frac{1}{2\cdot 10^m}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{2\cdot 10^m},$$

となるので、第 3 項部では有効数字桁数は変わらない。従って、本質的には第 1 項部、近似公式と真の値のずれとして、$\left|\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right|$ の部分を中心に考えることにする。

3.5 近似公式自体が保証できる有効数字の桁数とは

以上を基にして、x_iと 1 との誤差絶対値を$\varepsilon_i \coloneqq |x_i - 1| (\ge 0)$とし、$X$と 1 との誤差絶対値を$\varepsilon \coloneqq |X - 1| (\ge 0)$とする。 $\max_i \varepsilon_i \ge \varepsilon$ となる。検証すべきは加重相乗平均と加重相加平均の差がどの程度で押さえられるかであり、誤差の最大値の 2 乗の 2 倍で押さえられると示す。まず、

$$\frac{2}{3} < x_i < \frac{3}{2} \Longrightarrow |x_i - (1 + \ln x_i)| \le |x_i - 1|^2,$$

だから、

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i-\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i-\sum_{i=1}^{n} a_i\left(1+\ln x_i\right)+\left\{1+\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right)\right\}-\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right|$$
$$\le\sum_{i=1}^{n} a_i\left|x_i-\left(1+\ln x_i\right)\right|+\left|\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}-\left\{1+\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\right)\right\}\right|$$
$$\le\sum_{i=1}^{n} a_i\left|\left(x_i-1\right)^2\right|+\left|\left(X-1\right)^2\right|=\sum_{i=1}^{n} a_i\left|x_i-1\right|^2+\left|X-1\right|^2$$
$$<\sum_{i=1}^{n} a_i\left(\max_j \varepsilon_j\right)^2+\left(\max_j \varepsilon_j\right)^2=2\left(\max_j \varepsilon_j\right)^2,$$

となる。ここで変動幅が小数第 m 位未満とは、小数第 m 位までしか有効数字が無いときには 1 と違わないことを意味するものとする。小数第 m 位未満のずれの場合（$m=0$ では整数位まで)、

有効数字を想定した書き方をすると、

$$\left|x_i-1\right|<\frac{1}{2\cdot 10^m}\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{n}a_i x_i-\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}\right|<\frac{1}{2\cdot 10^{2m}},$$

と書き直せる。ここから、次のように結論付けられる。「扱う変動幅が小数第 m 位未満の場合、加重相乗平均と加重相加平均のずれは高々小数第$2m$位未満である。」これは変動幅が整数位未満の場合、加重相乗平均と加重相加平均のずれは高々整数位未満を意味する。変動幅が小さい場合にはこのずれは加重相加平均内の有効数字の桁数の議論で生じる誤差に比べて無視できる位小さくなると分かる。誤差上限と 1 に対する有効数字桁数は次ページの表 1 のようになる。

注意すべきは、この差はもっと小さくなる（有効数字はもっと細かい所まで妥当性を持つ）場合が多いということである。なぜなら、先の別証の議論を再考することで、

表 1　誤差上限と 1 に対する有効数字桁数

基の誤差上限	近似公式との差の上限	その差
50%(整数位)	50%(整数位)	同じ
約 33%(整数位)	約 22%(整数位)	同じ
15%(整数位)	4.5%(小数第 1 位)	-1 桁
10%(整数位)	2%(小数第 1 位)	-1 桁
5%(小数第 1 位)	0.5%(小数第 2 位)	-1 桁
1.5%(小数第 1 位)	0.045%(小数第 3 位)	-2 桁
1%(小数第 1 位)	0.02%(小数第 3 位)	-2 桁
0.5%(小数第 2 位)	0.005%(小数第 4 位)	-2 桁
0.15%(小数第 2 位)	0.00045%(小数第 5 位)	-3 桁
0.1%(小数第 2 位)	0.0002%(小数第 5 位)	-3 桁
0.05%(小数第 3 位)	0.00005%(小数第 6 位)	-3 桁

$$X=1+\ln(X)+\varepsilon=1+\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}\right)+\varepsilon=1+\sum_{i=1}^{n}a_i\ln(x_i)+\varepsilon=1+\sum_{i=1}^{n}a_i(x_i-1-\varepsilon_i)+\varepsilon$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}a_i x_i-\sum_{i=1}^{n}a_i-\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i+\varepsilon=1+\sum_{i=1}^{n}a_i x_i-1-\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i+\varepsilon=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i+\left(\varepsilon-\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i\right),$$

というように、2 つの誤差の「差」で扱えるからである。

4. 応用例：実効為替レート

4.1 近似具合の数値例：USA 大統領選での Mex$変動

近似具合を見る上で、[5]で取り上げた、発表者が 2016 年度の国際経済論 2 小テスト#1 再試（マークシート）で利用した数値例を述べる。先の USA 大統領選における Mex$（メキシコ・ペソ）の変動具合を近似的に取り扱う。

4.2 実効為替レートの定義と近似式

第t期のある通貨と他の通貨$i(i=1,2,\cdots,n)$との間での為替レートをS_{it}（名目でも実質でも設定可)、通貨iにおける比重をγ_{it}とする（但し比重γ_{it}の合計は 1)。第 1 期から第t期までのその通貨の実効為替レート$\bar{S}$は（詳しくは[4]参照）

$$\bar{S} \coloneqq \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{S_{it}}{S_{i1}}\right)^{\gamma_{it}},$$

と表せる。$S_{it} \fallingdotseq S_{i1}$なら、以下の近似ができる。

$$\bar{S} \coloneqq \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{S_{it}}{S_{i1}}\right)^{\gamma_{it}} \fallingdotseq \sum_{i=1}^{n}\gamma_{it}\cdot\frac{S_{it}}{S_{i1}},$$

4.3 数値例：名目実効為替レート

今通貨は Mex$(ペソ)の他は US$、€、UK￡、日本円だけとする。2016 年 11/8⇒11/9 の間に次の変動（外貨 1 単位を Mex$で表示）と比重(%)であったとする。なおここではマークシートでも出題ができるよう通貨数を少なくし、多少数字を丸めているが、本来は通貨数も多く、名目為替レートの水準も更に細かい。物価の変動を加味した実質実効為替レートでも（物価変動率を入れて）同様の近似ができる。

表 2　Mex$との名目為替レートと比重[2]

	US$1.-=	€1.-=	1 円=	UK￡1.-=
11/8	Mex$18.3	Mex$20.2	Mex$0.174	Mex$22.7
11/9	Mex$20.4	Mex$22.9	Mex$0.199	Mex$25.5
比重	57.0%	21.0%	14.0%	8.00%

[2] 本来、比重は貿易量から算出する必要があるが、ここでは通貨の交換量などを基準に算出している。

本来の名目実効為替レートの計算方法では

$$\left(\frac{20.4}{18.3}\right)^{0.570}\cdot\left(\frac{22.9}{20.2}\right)^{0.210}\cdot\left(\frac{0.199}{0.174}\right)^{0.140}\cdot\left(\frac{25.5}{22.7}\right)^{0.0800}\fallingdotseq 1.123407\cdots,$$

になる。

今回の近似計算の公式が適用可能かを検証するため、各通貨の変動比率と、その最大と最小の相加平均に対する割合等を確認すると、おおよそ次のようになる。

表 3　各通貨の変動比率とその相乗平均比

	US$	€	日本円	UK£
変動比率	1.114754	1.133663	1.143678	1.123348
割合	0.987193	1.003938	1.012807	0.994803
1 との差	0.012807	-0.003938	-0.012807	0.005197

各通貨の変動比率は最大と最小の相加平均（約 1.129216）から約 1.28%以内のずれしかなく、これで基準化して近似公式を当てはめることによる誤差の上限は（2 乗の 2 倍の）約 0.0328%となる。最大と最小との相加平均の水準をかけて、実際に近似公式を当てはめることによる誤差の上限は 0.000370…となる。有効数字上は上 3 桁を最低でも確保し、上 4 桁目も完全確保こそ保証できないものの、真の値に対しおよその推測が可能な段階に至る。

今回の近似計算での名目実効為替レートの近似値は

$$0.570\cdot\frac{20.4}{18.3}+0.210\cdot\frac{22.9}{20.2}+0.140\cdot\frac{0.199}{0.174}+0.0800\cdot\frac{25.5}{22.7}\fallingdotseq 1.123461\cdots,$$

になる[3]。共に約 12.3%の Mex$安を示す両者の違いは小さい（その差約 0.000054 は比率で約 0.0048%に相当し、約 12.3%との推測は成功している）。しかし非整数の指数乗があり、本来の計算方法で数値計算を行うことは通常の電卓や手計算では事実上無理である。一方、今回の近似計算では加減乗除の範囲内で計算でき、通常の電卓はおろか、手計算でも可能になる。本近似が学部教育で使える事を意味する。現実には有効数字上違いが無い数値例か確認しての出題が望ましい。

[3] 加重相加平均は加重相乗平均以上であることと今回の誤差上限 0.000370…であることから、加重相乗平均で求める本来の名目実効為替レートは 1.123046…～1.123461…の中にあるとなる。12.3%との推測は加重相乗平均が計算できない場合でも成功していることが分かる。

5. 応用例：時間変化率（成長率・上昇率）平均

5.1 応用例その 2：変化率（成長率・上昇率）の平均

他の応用例も考えられる。GDP などの時間変化率（成長率・上昇率）は基本的に数%の範囲内であり、今回の例に該当する。$i = 1,2,\cdots,n$においてg_iを第i期の時間変化率（成長率・上昇率）とすると、その平均$\bar{g}$について、概算としては

$$\bar{g} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+g_i)} - 1 \fallingdotseq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i,$$

という近似計算が可能になる。平均利子率でも同様である。通常両者の違いは強調するし、相加平均で計算することで多少過大評価となるが、n乗根の多くが手計算及び通常の電卓での計算が困難なことから、意味のある手法となる。

そしてこの手法はそのまま「単利」「複利」の議論に応用可能になる。ゼロ金利政策、（微小なる）マイナス金利政策などが登場して以来、銀行の預金金利も複利が複利たる、利息の利息が 1 円未満切り捨てでの半年複利などでは（少なくともペイオフ対象の水準やゆうちょ銀行での本来の貯金制限にあたる 1000 万円以内を考えれば）ほぼ期待できない状況が 2017 年 3 月現在でも続いている。その状況では元本にのみ利息をかける単利での近似計算でも金額は同じになる。事業などでの億単位以上の金額でも、低金利の時代にはこの近似計算がほぼそのまま使えることになる。

5.2 数値問題例：名目賃金（時給）の平均上昇率

数値例として発表者が 2016 年度の国際経済とデータ分析基礎で取り上げた数値を取り上げる[4]。あるバイトリーダーは 5 か月の間に時給が 2000 円⇒2208 円へと変化したとする。1 か月あたりの平均的な時給上昇率は本来、相乗平均から求める必要があるので、

$$\sqrt[5]{\frac{2208}{2000}} - 1 = 0.019985\cdots \fallingdotseq 0.01999,$$

となるので、約 1.999%（要は 2%位）となるが、通常の電卓で 5 乗根は計算できず、手計算でも 5 乗根を計算させることは困難となる。今回の近似計算方法だと

$$\frac{\text{変化後の値} - \text{変化前の値}}{\text{期数} \times \text{変化前の値}},$$

と計算できる。計算すると

[4] 数値はあえて綺麗な数字にしてある。

$$\frac{2208-2000}{5\times 2000}=0.0208\left(>\sqrt[5]{\frac{2208}{2000}}-1\right),$$

となって、2.08%と計算できる。この近似計算も加減乗除の範囲内で計算できるものである。実際には相加平均は相乗平均より少し大きくなる訳なので、端数を削って約 2%として本当には 2000 円から 5 か月で幾つになるか見ると、

$$2000\times(1+0.02)^5=2208.1616064\fallingdotseq 2208,$$

として、平均約 2%で 5 か月上がり続けると約 2208 円になると確認できる。ここで1.02^5は通常の電卓でも（最悪手計算でも）検証できるものである。ここまでを一連の流れとして説明することで、今回の近似計算方法が学部生の講義で有益であると学部生の手にも確認できるようになる。

5.3 数値例：名目水準の支出側での GDP の平均成長率

[7]によると、1994 年度には 502.3827 兆円であった支出側での名目 GDP は 2015 年度には 532.1914 兆円であり、その 21 年間の成長率(%)はそれぞれ 2.9, 2.3, 0.8, -1.3, -0.8, 1.3, -1.8, -0.8, 0.7, 0.5, 0.9, 0.7, 0.3, -4.1, -3.4, 1.4, -1.1, 0.2, 2.6, 2.1, 2.8 とされている。水準から直接相乗平均を計算するとその平均成長率は 0.0027485…から約 0.275%と分かる。示されている各成長率から平均成長率を求めることを考える。

相乗平均から 21 年間の平均成長率を求めると 0.0027772…から約 0.278%と分かる（実際の水準との差は約 0.003%）。相加平均を計算すると 0.0029523…から（相乗平均よりやや高い）約 0.295%となる。相乗平均との差は約 0.017%となる。与えられている各成長率の表示が百分率(%)での小数第 1 位までなので、相加平均・相乗平均共に平均成長率は約 0.3%と近似ができていることが分かる。

なお線形近似ではなくより近似精度の高い 2 次近似を扱う場合、第 2-3 節の記号を準用して $x_i\fallingdotseq 1$での $\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}\fallingdotseq\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ に 2 次の項である

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}a_ia_j\,(x_i-1)\left(x_j-1\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i-1)(x_i-1)^2,$$

を加えることで

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}\fallingdotseq\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}a_ia_j(x_i-1)(x_j-1)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i-1)(x_i-1)^2,$$

と書ける。今回で計算すると 0.0027782…から約 0.278%となり、水準から直接求めた場合と各成長率での相乗平均との誤差の範囲内に収まっている。

6. 議論：経済学教育などの観点を中心に

ここでは幾つか議論として残る部分を取り上げる。

まず、nが大きい場合の指数部分a_iの有効数字の桁数に関する議論は今回不十分な形でしか検証できていなく、残っている。しかし、nは固定の有限値であり、通常は有効数字から外れる誤差に対して十分小さい。少なくとも練習問題上は 1 桁が殆どであり、実際の日銀などが把握している実質実効為替レートの計算でも 2 桁以内が多い。

次に、関連する他の平均、例えば 2 乗平均や 3 乗平均、あるいは調和平均などで類似の検討が可能かなどについては検討の余地はある。特に∞乗平均に相当するものは最大値演算子 max と対応させることができるため、本来は考える必要があるものである。しかし、（標準偏差などでも定義設定をする際に 2 乗平均が応用されることを念頭においても、）n乗型の平均に関しては$n > 1$の段階で線形近似をしようにも 1 次の項は消えてしまう。最大値演算子 max などはその微分可能性が崩れる可能性があり、本議論にはなじまない。以上から経済学教育の観点からは（調和平均に経済学的な意味を充分に説明しない限り）本検討は（加重）相加平均と（加重）相乗平均との近似関係だけを確認すれば本質的には事足りることが分かる。

続いて、（加重）相加平均と（加重）相乗平均の質的な違いを無視して使わせることの妥当性の問題がある。ここについては、次の点を指摘する必要がある。(1) 有効数字上の妥当性が事実上保証される範囲においては、どちらで計算させても問題ない。(2) 相乗平均（幾何平均）の意味を説明する上では直角三角形の垂線を利用した図などが一般的だが、この図に経済学上の対応関係が付け辛い面が上がる。(3) ほぼ全てで、関数電卓が少なくとも必要な（加重）相乗平均に対し、最悪手計算でも計算できる（加重）相加平均の方が計算し易い。(4)（経済学系など）文系出身者の標準的予備知識と準備できる（経済数学などの）応用数学の科目の時間数を考えると、低学年の内は分量を抑えるため教える内容は減らせる方が良い。相乗平均の正確な計算方法を練習させる時間を削れる妥当性はある。そのため、やや過大評価である旨を指摘の上で使うことは妥当性がある。

次に、関数電卓があれば計算できるものを、敢えて正確性を落としてまで不正確な近似計算させる妥当性の問題がある。ここについては、関数電卓を本質的に必要とする使用頻度を指摘する必要がある。例えば国際金融の学部 2 年生講義で本質的に関数電卓を必要とする項目と言えば、（平均利子率や平均インフレ率等を求めさせる稀有な場合を除いては）実効為替レートの計算位である。通常の講義で関数電卓を日々使っている場合ならともかく、講義内で 1-2 項目だけの場合には、そのために用意するように説明するのは説得力に欠ける。通常の電卓はコンビニなどにもあるが、関数電卓は文房具屋等でないと入手できない点も、困難をさらに加速さ

せる。特定の講義回ないし定期試験・小テストだけ関数電卓を要求する場合、通常とは異なるものを忘れた場合に現地調達が難しい場合も少なくない[5]。以上から、近似する誤差を補って余りある恩恵があるといえる。

一時的ならば PC 室の一時利用で対処可能との指摘が出る可能性もある。ここについては、PC 室の収容能力の問題が指摘できる。国際金融の講義などは通常の講義になるので、少人数の場合はともかく、PC 室の収容人数に追いつかない場合も出てくる。個々に保有している PC ないしタブレット（・スマホ）などを持参させれば良いとの指摘も考えられるが、全員の保有は想定できない場合も少なくない。

7. おわりに

本稿では加重相乗平均を加重相加平均で近似する妥当性について、範囲を制限した上で近似公式に加えて有効数字の観点からも検証を加え、その上で実効為替レートの計算など経済学上の応用例等を取り上げた。関数電卓などが必要な加重相乗平均に対し、通常の電卓あるいは手計算でも求められる加重相加平均で（多少過大評価を想定の上で）充分近似できる妥当性が示されたことで、実効為替レートや離散時間における平均変化率（成長率・上昇率・利子率）、更には生産量などの伸び率の計算と、応用例は幅広い。加重でも意味がとり易い加重相加平均が使える重要性は高い。

謝辞　本稿の着想の原点は専修大学（経済学部・経済学科）2015 年度「国際経済論 2」小テスト#1 再試で、この近似計算で解いて（関数電卓なしに）値を正解した学生の指摘に基づきます。また、本報告では妻木伸之先生（専修大学・法学部・非常勤講師）、吉見太洋先生（南山大学・経済学部・准教授）、神野真敏先生（尚美学園大学・総合政策学部・専任講師）の助言も頂きました。日本リメディアル教育学会＠神田外語学院、情報処理学会・コンピュータと教育研究会＠大阪電気通信大学、Hayama Meeting、経済教育学会＠日本大学、数学教育学会＠首都大学東京で報告も聞いて頂き、有益なコメントも頂きました。記して感謝申し上げます。特に数理経済学会・近畿地区＠大阪大学においては、品川（東京海洋大学）からの Skype 中継による報告をさせて頂きました。本中継報告をお許し頂きました浦井憲先生の研究室の皆様に深く感謝申し上げます。さらに、本稿は専修大学・社会科学研究所での野口旭グループへの支援事業における業績の 1 つとして扱われる旨、ここに記して社会科学研究所に御礼申し上げます。なお本稿の誤りは筆者に帰します。

[5] この点は実際に学生からの意見で出てきたものである。

参考文献

[1] “第 189 回国会 財務金融委員会 第 12 号議事録、平成 27 年 6 月 10 日”
http://www.shugiin.go.jp/internet/itdb_kaigiroku.nsf/ html/kaigiroku/009518920150610012.htm（参照 2016-12-22）

[2] 文部科学省、高等学校学習指導要領解説 数学編、平成 21 年（平成 24 年改訂）
http://www.mext.go.jp/component/a_menu/ education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2012/06/06/1282000_5.pdf（参照 2017-01-09）

[3] 永易淳、江阪太郎、吉田裕司。はじめて学ぶ国際金融論。有斐閣ストゥーディア、2015 年。

[4] 藤井英次。コアテキスト国際金融論 第 2 版。新世社、2013 年。

[5] 小川健。学部 2 年次の国際金融の初歩で関数電卓なしに実効為替レートを計算できる近似公式、日本リメディアル教育学会第 5 回関東・甲信支部会報告（2016 年度）、2017-2-11@神田外語学院。

[6] “重み付き相加相乗平均の不等式の証明”’高校数学の美しい物語’.
http://mathtrain.jp/wighted_amgm（参照 2017-01-08）

[7] 内閣府 HP“国民経済計算（GDP 統計）”より年次 GDP 実額（2015 年度・名目）及び年次 GDP 成長率（2015 年度（前年度比）・名目）http://www.esri.cao.go.jp/jp/sna/menu.html（参照 2017-01-19）