

演算選択と見積もり回答の非整合性にみられる割合学習の つまずき—大学生を対象とした調査から—

佐藤 誠子*

Difficulties in the Learning of Ratio Revealed by Inconsistency between Deciding on Operation and Qualitative Reasoning in a Word Problem: From a Survey of University Students

Seiko SATO

Department of Human Education, Faculty of Human Studies,
Ishinomaki Senshu University, Ishinomaki 986-8580

1. 問題と目的

割合学習の難しさについては多くの先行研究で指摘されているところである。割合は小学校第5学年算数で学習する内容である。とくに割合文章題の解決においては、目標に応じて割合の3用法の中から適切な演算を選択しなければならない。それはすなわち、割合＝比較量÷基準量（第1用法）、比較量＝基準量×割合（第2用法）、基準量＝比較量÷割合（第3用法）のことを指す¹（Table1）。このうち、第3用法による解決が求められる問題は他の用法に比べて正答率が低く、とりわけ問題解決が困難な傾向がみられる（e.g., 小野, 2017⁽¹⁾；吉田, 2003⁽²⁾）。では、割合文章題のつまずきは文章題解決過程のどの段階で生じるのだろうか。

Mayer (2008)⁽³⁾は、文章題解決のプロセスとして、変換（translation）、統合（integration）、プラン化（planning）、実行（execution）の4つの段

階があることを示している。「変換」とは文の内容を理解し各文を心的表象に変換すること、「統合」とはそれらの情報を一貫した問題表象に統合することにあたる。「プラン化」とは解決のための適切な方略や演算を選択し数式を生成することであり、「実行」とはその数式を計算することにあたる。このうち変換・統合の過程は理解過程、プラン化・実行の過程は解決過程とよばれる。これを割合文章題の解決に当てはめれば、まず理解過程においては、問題文中に示されている既知の量および未知の量（目標：求めたい量）はそれぞれ基準量・比較量・割合のうちいずれにあたるかを同定し、それらの量の関係構造を理解する。そして、解決過程では割合の3用法の中から適切な演算を選択し、その計算を実行することになる。これらのプロセスについて、第3用法による割合文章題の解決の場合を例に説明する。例えば、次のような文章題があるとする（蛭名・佐藤（2017）⁽⁴⁾より抜粋）。

「公園にある花だんの面積は 45 m^2 です。
これは、公園全体の面積の 60% にあたります。
公園全体の面積は何 m^2 でしょう。」

この文章題の場合、未知の量（求めたい量）は「公園全体の面積」であり、また既知の量は「花だんの面積」およびそれが公園全体に占める「割合」である。このうち「公園全体の面積」は基準量、「花だんの面積」は比較量にあたる。そして、花だんは公園にあり、花だんの面積（比較量）は公園

Table1 割合の3用法と問題例

3用法	問題例
第1用法 割合＝比較量÷基準量	A君のクラス全体の人数は30人です。そのうち男子の人数は12人です。A君のクラスの男子の人数はクラス全体の何%ですか。
第2用法 比較量＝基準量×割合	A君のクラス全体の人数は30人です。A君のクラスの男子の人数はクラス全体の40%です。A君のクラスの男子の人数は何人ですか。
第3用法 基準量＝比較量÷割合	A君のクラスの男子の人数は12人で、クラス全体の40%にあたります。このクラス全体の人数は何人ですか。

*石巻専修大学人間学部人間教育学科

全体の面積（基準量）の中に含まれるので、公園全体の面積（基準量）と花だんの面積（比較量）の関係は全体・部分関係にある。そのため基準量は全体量、比較量は部分量として捉えることができる。続いて、これらの理解過程を通して構成された表象に基づいて適切な方略を選択し、数式を生成する。この文章題の場合、未知の量は「公園全体の面積」でそれは基準量（全体量）にあたるので、基準量を求める演算が選択される。そして「 $45 \div 0.6$ 」と立式しこの式の計算を実行することになる。これらのいずれかの段階につまずきが生じれば、文章題解決が困難になる。

さて、例に挙げた割合文章題の場合、花だんは公園の中にあることが文章から読み取れれば、公園の面積と花だんの面積が全体・部分関係にあることは比較的容易に理解できる。そのため、理解過程において「求めたい全体の量（基準量：公園全体の面積）は部分の量（比較量：花だんの面積）よりも大きい」という答えの見積もり自体は可能であると考えられる。では、そのことと解決過程における演算選択との関係はどのように想定できるだろうか。

量の全体・部分関係から答えの大きさの見通しを持ちつつも、解決過程においてそれに応じた適切な演算選択ができない場合（つまりこの場合、求めたい公園全体の面積が花だんの面積よりも大きいことを理解しているにもかかわらず、そのような計算結果となる演算を選択できないという場合）、その要因の一つとして、学習者のもつ「制限的乗法観・制限的除法観」の妨害的効果があることが指摘されている（小野寺、1988⁽⁵⁾）。それは、「乗法は元の数（被乗数）を大きくする操作である」「除法は元の数（被除数）より小さい数を生み出す操作である」という乗法ないし除法に対する（誤りを含む）見方である。小学校学習指導要領（平成29年告示）解説算数編（文部科学省、2018⁽⁶⁾）によれば、小学校第2学年で乗法の意味を、第3学年で除法の意味を学習する。まず、乗法について、 $a \times b$ を「一つ分の大きさが a のものの b 個分の大きさ、あるいは b 倍に当たる大きさを求める計算として意味付けられること」「 a を b 個だけ加えること（同数累加）によって、その大きさを求めることができること」として学ぶ（前者は

「1あたり量 $\times$ いくつ分」「倍」、後者は「累加」の意味である）。除法については、「乗法の逆演算であること」すなわち「一つ分の大きさ」を求める除法（等分除）と「いくつ分」を求める除法（包含除）を学習する。この段階で扱われる乗数や除数は正の整数である。乗数や除数が1より大きい場合は、乗法の演算結果は常に被乗数よりも大きくなり、除法の演算結果は常に被除数よりも小さくなる。学習者はそのような学習経験から、暗黙的に制限的乗法観・制限的除法観を形成してしまうと考えられている。その後、第5学年で初めて1より小さい小数（純小数）が乗数ないし除数の場合が登場し乗法・除法の意味が拡張するが²、小野寺（1988）⁽⁵⁾によれば、「乗法はいつでも答えを大きくする操作である」「除法はいつでも答えを小さくする操作である」というような制限的乗法観・制限的除法観の下では、第3用法の割合文章題において定性的に正しい答えの見通しを持っていたとしても誤って第2用法（乗法立式：比較量 $\times$ 割合）を選択する者が少なくないという。

ただし、このような想定には、ある前提を置かなければならない。それは、「計算結果が見積もり（答えは比較量より大）に沿うように演算を選択するはずだ」とする学習者の思考の合理性である。つまり、学習者がおこなう見積もり（答えの見通し）と演算選択に整合性があるとするものである。しかしながら、このような学習者の合理性について疑問符がつくような調査結果がある。大学生を対象とした佐藤・工藤（2021）⁽⁷⁾の調査では、3頂点（B、C、D）が一直線上に並んだ $\angle BCD$ について、角の問題として提示された場合にはCを頂点とした 180° の角として認めるが、A、B、C、Dの4つの頂点のうち3頂点（B、C、D）が一直線上に並んだ特異な四角形として提示された場合にはCを角として認めない者が多くみられた。また、後者のような図形について定義ルールから四角形であることを証明させた後、その図形を四角形として分類するかどうかの判断を求めた課題で、適切な証明ができたにもかかわらず自身の判断としては「四角形以外」に分類した者も少なくなかった。同種の内容を問う課題であるにもかかわらず判断が一貫せず、課題状況によって判断が変化し整合性のない回答を示す傾向

がみられるのである。

では、とりわけ解決が難しいとされる第3用法の割合文章題において、そもそも答えの見積もりと演算選択の整合性はどの程度みられるのだろうか。小野寺（1988）⁽⁵⁾は制限的乗法観が演算選択に妨害的にはたらくことを指摘しているが、文章題での見積もり課題を課しておらず、対象者がそもそも答えの見通しを適切におこなえていたかどうか確実ではない。また、日米の小学生を対象にした算数の問題解決スキルの調査では、算数到達度スコアが同レベルの対象者で比較した場合、日本の小学生は米国の小学生に比べて問題解決スキルが低いことが示されている（Mayer, Tajika, & Stanley, 1991⁽⁸⁾）。このことは日本の実際の算数教育において問題解決スキルの育成や意味理解の促進が不十分であることを示唆するものである。これを踏まえれば、割合文章題における立式が問題理解と切り離されている可能性も考えられる。そこで本研究では、大学生を対象に³、割合文章題第3用法の問題解決の困難さについて、答えの見積もりと演算選択の整合性の観点から探索的に検討する。具体的な検討事項は主に次の3点である。①適切な答えの見積もりができるか（理解過程）。②適切な演算選択ができるか（解決過程）。③できない場合、制限的乗法観・制限的除法観との関連はどの程度みられるか。これらの結果をもとに、割合学習に関する課題点を導出する。

2. 方法

2.1 対象者

私立大学生44名（文系学部生25名、理系学部生18名、不明1名）である。

2.2 手続き

心理学関連の授業の一部（教科の教授と学習）として調査をおこなった。調査問題が記載されたA4判プリントを配付し集団で実施した。実施にあたって「これは、かけ算やわり算について、皆さんがどのような認識をもっているかを調べるためのアンケートです」と示した上で、もし全くわからない場合は空白でも構わないこと、本調査結果は授業内で扱うが科目の成績とは無関係であること、回答内容などの個人情報厳重に保護され

ることを説明し、了承を得た。なお、調査は無記名で実施した。

2.3 調査問題

乗法観・除法観問題 「下にあげた4つの式（●×1.2、●×0.7、●÷1.3、●÷0.8）で、●は0でない同じ数（正の数）を表しています。それぞれについて計算の答えは●の表す数より大きくなるか、小さくなるかを判断してください。計算せずに答えを選んでください」と教示し、それぞれ3択（大きくなる／小さくなる／わからない）で回答を求めた。この問題は平成20年度全国学力・学習状況調査算数Aの問題⁽⁹⁾を参考に作成した。

割合文章題（第3用法） 「公園にある花だんの面積は45m²です。これは公園全体の面積の60%にあたります。公園全体の面積は何m²でしょう」という問題（蛭名・佐藤、2017⁽⁴⁾）を提示し、1) 問題の答え（公園全体の面積）について「45m²より小さいと思う／45m²より大きいと思う／計算しないとわからない」の3択から選択させた。次に、2) この問題の「式」を記入するよう求めた。この際、答えの計算は不要とした。

3. 結果

3.1 割合文章題（第3用法）

まず1) について、答えの見積もりを「45m²より大きい」（正答）と回答した者は34名（77%）、「45m²より小さい」との回答は8名（18%）、「計算しないとわからない」との回答は2名（5%）で

Table2 割合文章題の立式の結果

	立式分類	立式例	人数(%)
適切 立式	第3用法	$45 \div 0.6$	6 (14%)
	第2用法 (方程式)	$X \times 0.6 = 45$	2 (5%)
	単位量あたり	$45 \div 6 \times 10$ $45 \div 60 \times 100$	7 (16%)
不適切 立式	乗法立式 (部分量×割合)	45×0.6	9 (20%)
	その他 (答え小)	45×0.4 45×0.06 $(45 \div 6) \times 4$	7 (16%)
	その他 (答え大)	45×1.6 $(45 \times 0.4) + 45$	6 (14%)
無答	—	—	7 (16%)

あった。次に 2) 立式について、回答結果を Table2 に示す。適切立式は 44 名中 15 名 (34%) にとどまった。その内訳を見ると、第 3 用法の式を記述した者は 6 名のみであった。「第 2 用法」は基準量を X として第 2 用法 (比較量 = 基準量 $\times$ 割合) により方程式を立式するものであるが、そのような回答は 2 名にすぎなかった。「単位量あたり」とは、1% (あるいは 1 割) あたりの量 (この文章題の場合は面積) を除法 (等分除) にて求め、その 100% (あるいは 10 割) 分を乗じて基準量 (全体量) を算出する方法である。このような回答は 7 名にみられた。一方、不適切立式は 22 名 (50%) であった。その内訳をみると、「乗法立式」(部分量 $\times$ 割合とする演算) が 9 名と最も多く、他は演算結果 (基準量) が比較量よりも小さくなる立式が 7 名、大きくなる立式が 6 名であった。

3.2 乗法観・除法観問題

回答結果を Table3 に示す。 $\bullet \div 0.8$ の正答率が相対的に低く 6 割弱にとどまった。このうち、乗法について、 $\bullet \times 1.2$ と $\bullet \times 0.7$ の双方に正答

した者を「適切」、両方とも計算結果が被乗数より「大きくなる」と回答した者を「制限的乗法観」所有者、いずれにも該当しない者を「その他」と分類した。その結果、乗法については順に 35 名 (80%)、4 名 (9%)、5 名 (11%) となった。除法についても同様に、 $\bullet \div 1.3$ と $\bullet \div 0.8$ の双方に正答した者を「適切」、両方とも計算結果が被除数より「小さくなる」と回答した者を「制限的除法観」所有者、いずれにも該当しない者を「その他」とした。その結果、除法については順に 23 名 (52%)、9 名 (20%)、12 名 (27%) となった。

3.3 見積もりと立式・乗法観・除法観との関連

ここでは、割合文章題の答えの見積もりが適切であった 34 名を対象に分析する (Table4)。まず、見積もりと立式の関係について、適切立式は 34 名中 14 名 (41%)、不適切立式は 15 名 (44%)、無答が 5 名 (15%) であった。不適切立式の 15 名中 10 名が答えの見積もり (答えは比較量より大) に沿わない計算結果となる立式を記述していた (Table4 下線部)。

次に、立式と制限的乗法観および制限的除法観との関係について分析した (Table4 参照)。制限的乗法観所有者の割合は、適切立式をした者と不適切立式をした者の間で差はなかった (順に 1 名 (7%)、2 名 (13%))。また、制限的除法観所有者の割合についても、適切立式をした者と不適切立式をした者の間で差はなかった (順に 3 名 (21%)、2 名 (13%))。不適切立式と制限的乗法観・除法観との関連はみられなかった。

Table3 乗法観・除法観問題の結果

	答えは●の表す数より		
	大きくなる	小さくなる	わからない
$\bullet \times 1.2$	39 (89%)	2 (5%)	3 (7%)
$\bullet \times 0.7$	5 (11%)	36 (82%)	3 (7%)
$\bullet \div 1.3$	3 (7%)	35 (80%)	6 (14%)
$\bullet \div 0.8$	25 (57%)	10 (23%)	9 (20%)

注) 数字は人数。下線部が正答である。

Table4 割合文章題の立式と乗法・除法観との関連

立式分類		乗法・除法観				計
		適切	制限的乗法観	制限的除法観	制限的乗法・除法観	
適切立式	第 3 用法	5				5
	第 2 用法 (方程式)	1		1		2
	単位量あたり	2		1	1	7
不適切立式	乗法立式 (部分量 $\times$ 割合)	<u>3</u>		<u>1</u>		<u>6</u>
	その他 (答え小)	<u>1</u>	<u>1</u>		<u>1</u>	<u>4</u>
	その他 (答え大)	3			2	5
無答		3		1		5
計		18	1	4	2	34

注) 数字は人数。空白セルは 0 人。

さて、制限的乘法観とは「乗法はいつでも答えを大きくする操作である」とする見方である。もし答えの見積もり（答えは比較量より大）に沿うように演算を選択しているならば、制限的乘法観所有者は立式において乗法を選択するはずである。そこで、制限的乘法観所有者（3名）の立式内容を詳しくみたところ、適切立式1名は「 $45 \div 6 \times 10$ 」の単位量あたりの立式を記述していた。不適切立式2名は「 $45 \div 60$ 」「 $(45 \div 6) \times 4$ 」の立式を記述しており、「部分量×割合」の乗法立式はみられなかった。一方、制限的除法観とは「除法はいつでも答えを小さくする操作である」とする見方である。もし答えの見積もり（答えは比較量より大）に沿うように演算を選択しているならば、制限的除法観所有者は立式において第3用法の直接適用や除法を回避しているはずである。そこで、制限的除法観所有者（6名）の立式内容を詳しくみたところ、適切立式3名のうち1名は「 $X \times 0.6 = 45$ 」の第2用法（方程式）を、他2名は「 $45 \times (100 \div 60)$ 」「 $45 \div 6 \times 10$ 」の単位量あたりの立式を記述していた。これらの3名は、除法を直接適用しなかった点において一貫性がみられた。一方、不適切立式の2名では、1名は「 $45 \times 60 \div 100$ 」の乗法立式（部分量×割合）を、もう1名は「 $45 \div 60$ 」の立式（答え小）を記述しており、いずれも答えの見積もりに合致しない演算を選択していた。

4. 考察

本研究は、割合文章題第3用法の問題解決の困難さについて、答えの見積もりと演算選択の整合性の観点から検討するものであった。調査の結果、①答えの見積もりが適切であった者のうち、立式が適切であった者は4割程度にとどまった。立式が不適切であった者の多くは、見積もりと合致しない（計算結果が小さくなるような）演算を選択していた。②不適切な立式と、制限的乘法観・制限的除法観との関連はみられなかった。これらの結果から、対象者は各問題に対して場当たりの思考、解決をおこなっており、そもそも乗法、除法、割合についての理解が構造化されていないことが推察された。そこで、以下、それぞれの問題の結果から割合学習の課題について考察す

ることとしたい。

4.1 見積もり課題について

本研究で用いた文章題の問題状況は、基準量と比較量が全体・部分関係の構造となっているものであった。この問題で、そもそも答えの大きさの見通しを適切におこなうことができなかった者が2割程度存在した。彼らはテキストレベルでの理解が不十分であったために、適切な問題表象を構築することができなかった可能性が考えられる。これは、新井（2018）⁽¹⁰⁾の指摘する、対象者の基礎的読解力（構文理解）の問題として捉えられるように思われる。

4.2 演算選択（立式）について

先述したように、割合の3用法のうち第3用法は比較量を割合で割ることで基準量を求めるものである。本研究の調査において、第3用法の直接適用が少なかった（全体で14%）ことは、学習者にとって「割合で割る」ことの理解の難しさを示しているといえよう⁴。しかし、割合について基準量と比較量との関係が第1用法あるいは第2用法の形で表象されていれば、未知の量をXとして方程式によって求めることも可能である。本研究の調査ではそのような方程式の立式は44名中2名（5%）にしかみられなかった。なお、小学校算数の教科書（東京書籍）⁽¹¹⁾では、割合を「もとにする量を1としてみたとき、比べられる量がどれだけにあたるかを表した数」と定義し、「割合＝比べられる量÷もとにする量」の式（第1用法）を導入している。本調査ではこの定義に戻って方程式（あるいは比の式）を立式する記述もみられなかった。対象者はそもそも割合自体の意味理解が不十分であることがうかがえる。割合学習においては、学習者に対して割合をどのような量として捉えさせるかが問題となるといえよう。

4.3 乗法観・除法観問題について

特に除法観問題について、2問とも正答した者は5割程度と低かった。除法は乗法の逆演算であることから、除法を理解するには乗法の意味理解が不可欠である。先述したように、乗法の学習の初期段階では同数累加、1あたり量×いくつ分と

して意味づけられる。しかし、麻柄・進藤 (2005)⁽¹²⁾によれば、大学生や小学校教師でも乗法の理解が「累加」にとどまっており、そのために小数が乗数の場合の作問に失敗する者が少なくないことが示されている。「1あたり量×いくつ分」としての乗法の意味理解ができていなければ、等分除 (1あたり量を求める除法)、包含除 (いくつ分を求める除法) といった除法の意味理解も不十分となる。「1より小さい数 (純小数) が除数の場合、答えは被除数よりも大きくなる」と答えられるためには、除法の意味理解も関与する (例えば、 $2.4 \div 0.2$ は「2.4の中に0.2がいくつ分あるかを求める計算」として意味づけられる)。本研究の対象者はこのような乗法・除法の理解が不十分であった可能性がある。乗法や除法の学習においては、計算スキルなどの手続き的知識に偏ることなく、乗法および除法の意味理解を促す支援が求められる。

4.4 本研究の限界と今後の課題

上記の考察から、本研究の対象者は、そもそも割合や乗法・除法の意味理解が不十分であることが浮き彫りとなったが、本研究の調査問題は極めてシンプルなものであったため、それらの意味理解の程度について詳細に検討することができなかった。乗法観・除法観の問題については、乗数あるいは除数が1より大きい小数と小さい小数の各2問でしかたずねていない。これらに作問課題などを追加し問題のバリエーションを増やすことで、対象者のもつ乗法・除法の意味理解の様相を把握し、割合文章題における演算選択との関連についてより詳細に分析することができると考えられる。

また、本研究では割合文章題において、まず答えの見積もり (答えの大きさの見通し) ができるかどうかをたずねたが、それは理解過程の一部を把握しているに過ぎない。理解過程である変換・統合過程では、問題文中の基準量、比較量、割合の同定に加え、それらを相互に関連させて表象を統合し、問題スキーマを生成させることが求められる。そもそも割合文章題における統合過程は、全体・部分関係や大小関係の理解だけでなく、より本質的な構造理解に関わる (多鹿・石田・岡本、

1994⁽¹³⁾)。したがって、割合の構造理解をどのように促進するかが重要な課題となるだろう。加えて、乗法や除法の意味理解を拡張し、それらを割合の理解に統合するための教授学習のあり方について検討することが求められる。

引用文献

- (1) 小野耕一 (2017). 中学生における割合3用法の実態調査 第1部中学生における割合の理解調査 日本教授学習心理学会算数科授業研究会運営委員会 (編) 算数科授業研究会報告書 pp. 4-8.
- (2) 吉田甫 (2003). 学力低下をどう克服するか 子どもの目線から考える 新曜社
- (3) Mayer, R. E. (2008). Learning Mathematics. In R. E. Mayer, *Learning and Instruction* (2nd Ed.) (pp. 152-205). Pearson Prentice Hall.
- (4) 蛭名正司・佐藤誠子 (2017). 追跡調査問題の結果 第2部「割合」の授業実践 日本教授学習心理学会算数科授業研究会運営委員会 (編) 算数科授業研究会報告書 pp. 82-87.
- (5) 小野寺淑行 (1988). 制限的乗法観が算数文章題の解決に及ぼす妨害的効果 熊本大学教育学部紀要 人文科学、37、353-365.
- (6) 文部科学省 (2018). 小学校学習指導要領 (平成29年告示) 解説 算数編
- (7) 佐藤誠子・工藤与志文 (2021). 概念変化はなぜ生じにくいのか—仮説的判断を阻害する要因としての自己完結的推論— 教育心理学研究、69(2)、135-148.
- (8) Mayer, R. E., Tajika, H., & Stanley, C. (1991). Mathematical problem solving in Japan and the United States: A controlled comparison. *Journal of educational psychology*, 83(1), 69-72.
- (9) 国立教育政策研究所 (2008) 平成20年度全国学力・学習状況調査 算数A (https://www.nier.go.jp/08tyousa/08mondai_03.pdf)
- (10) 新井紀子 (2018). AI vs. 教科書が読めない子どもたち 東洋経済新報社
- (11) 藤井斉亮・真島秀行 (代表) (2020). 新しい算数5下 東京書籍
- (12) 麻柄啓一・進藤聡彦 (2005). 「小数のかけ算」に關する教師の不十分な意味理解と教員養成系学生への援助 教授学習心理学研究、1(1)、3-9.
- (13) 多鹿秀継・石田淳一・岡本ゆかり (1994). 子どもの算数文章題解決における文章理解の分析 日本教科

教育学会誌、17(3)、125-130.

(14) 芳沢光雄 (2019). 「%」が分からない大学生 日本の数学教育の致命的欠陥 光文社新書

謝辞

本研究は JSPS 科研費 19K03235 の助成を受けたものです。

脚注

1 小学校算数では、基準量は「もとにする量」、比較量は「比べられる量」という表現で教えられる。

2 すなわち、「 $B \times p$ を『 B を基準にする大きさ (1) とみたときに、割合 p に当たる大きさを求める計算』とし

て捉え直すこと」ができ、また、除法は乗法の逆演算であることから「割合 p を求める場合」と「基準にする大きさ B を求める場合」とに拡張することができる (文部科学省、2018⁽⁶⁾)。

3 割合の問題解決の難しさは大学生でも例外ではないことが芳沢 (2019)⁽¹⁴⁾により示されている。

4 「割合で割る」ことについて意味づけを試みれば、「比較量が割合 1%あたりいくらになるか」を求める計算として理解することも可能である。これは本調査でみられたような単位量あたりの立式となる。1%あたりの量を算出し、その 100%分を乗じて全体量を求める計算式であるが、それは「1あたり量 $\times$ いくつ分」としての乗法理解であることに注意が必要である。