漸近的非負断面曲率多様体の位相について

渡辺　正芳

Topology of Manifolds with Asymptotically Nonnegative Sectional Curvature

Masayoshi WATANABE

Department of Basic Sciences, Faculty of Science and Engineering, Ishinomaki Senshu University, Ishinomaki 986-8580

Abstract

We show that a complete noncompact Riemannian manifold with asymptotically nonnagative sectional curvature is of finite topological type if it contains enough rays starting from the base point.

1. 序

リーマン幾何学における重要なテーマのひとつは，多様体の曲率と位相の関係性を理解することである．コンパクトでないリーマン多様体に対しては，非負断面曲率をもつならば，有限位相型になることがよく知られている[(1)]．多様体 M が有限位相型であるとは，M のコンパクト部分集合 Ω が存在して，$M\setminus\Omega$ が $\partial\Omega\times[0,\infty)$ に同相になることをいう．この記事では，曲率が負になることを許し，たくさんの半直線をもつ場合には有限位相型であることを証明する．

まず，定理を述べるための記号の説明をする．M をコンパクトでない完備リーマン多様体とし，d をリーマン距離とする．点 $p\in M$ に対して，中心が p で半径 r の球を $B_r(p)$，球面を $S_r(p)$ で表す．正の数 r に対して

$$k_p(r)=\inf_{M\setminus B_r(p)}K$$

と定義する．K は M の断面曲率であり，下限は $M\setminus B_r(p)$ のすべての点におけるすべての断面についてとる．また，ある点から出る半直線の多さを表す関数 $\mathcal{H}$ を次のように定める．点 p から出る半直線の和集合を R_p で表し，$r>0$ に対して

$$\mathcal{H}(p,r)=\max_{x\in S_r(p)}d(x,R_p)$$

と定義する．明らかに

$$0\le\mathcal{H}(p,r)\le\max_{x\in S_r(p)}d(x,p)=r$$

がすべての $r>0$ に対して成り立つ．

次の定理を証明することがこの記事の目的である．

定理． 任意の $C>0$ と $0\le\alpha\le2$ に対して，次が成り立つような定数 $\epsilon=\epsilon(C,\alpha)>0$ が存在する．M をコンパクトでない完備リーマン多様体する．ある点 $p\in M$ が存在して，

$$k_p(r)\ge-\frac{C}{(1+r)^\alpha},\tag{1.1}$$

$$\mathcal{H}(p,r)<\epsilon r^{\alpha/2}\tag{1.2}$$

が任意の $r>0$ に対して成り立つならば，M は有限位相型である．

注意（曲率条件について）．条件（1.1）は点 p から遠いほど曲率がだいたい非負であることを意味している．

定数 α の範囲について，$\alpha>2$ のときの条件（1.1）を満たすリーマン多様体は有限位相型になることが知られている[(2)]．また，任意のパラコンパクト多様体は $\alpha=2$ のときの条件（1.1）を満たすリーマン計量をもつため[(3)]，条件（1.2）は外せない．

注意（半直線の条件について）．関数 $\mathit{H}(p,r)$ は 0 に近いほど p から出る半直線が多いことを意味し，r に近いほど半直線が少ないことを意味する．例えば，$M=\mathbb{R}^n$ のとき

$$\mathit{H}(p,r)=0\ (r>0)$$

であり，$M=S^{n-1}\times\mathbb{R}$ のとき

$$\mathit{H}(p,r)=r\ (0<r\leq\pi)$$

である．ここで，S^{n-1} は $n-1$ 次元単位球面を指す．

定理の $\alpha=2$ の場合は，ユークリッド空間に微分同相になることが Wang－Xia により証明されている（文献（4）の Theorem 1.1）．なお，この記事の定理は Sha－Shen による定理（文献（5）の Lemma 2.1）に対応しており，証明は本質的に同じである．

2. 準備

定理の証明のキーポイントは Grove－塩濱により開発された距離関数の臨界点の理論[(6)]と，曲率が下に有界な多様体に対するトポノゴフの三角形の比較定理である．ここでは，臨界点理論における結果とトポノゴフの比較定理を述べる．詳しくは文献（7）を見よ．

M を完備リーマン多様体とし，基点を $p\in M$ とする．点 p からの距離関数を $d_p(x)=d(p,x)$ と表す．点 $x\in M\setminus\{p\}$ が d_p の臨界点であるとは，任意の接ベクトル $v\in T_xM$ に対して，x から p への最短測地線 $\gamma:[0,d(x,p)]\to M$ が存在して，

$$\angle(v,\gamma'(0))\leq\frac{\pi}{2}$$

が成り立つことである．例えば，M が球面のとき，北極は南極からの距離関数の臨界点である．定理の証明には次の臨界点理論からの事実を用いる．

事実．正の数 r について，もし $M\setminus B_r(p)$ が d_p の臨界点をもたないならば，それは $S_r(p)\times[r,\infty)$ に同相である．

次に，トポノゴフの比較定理を述べる．

トポノゴフの比較定理．M を断面曲率が $k\in\mathbb{R}$ 以上の完備リーマン多様体とする．M の任意の測地三角形 $\triangle pqr$ に対して，曲率が k の単連結完備 2 次元リーマン多様体 $M^2(k)$ の測地三角形 $\triangle\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}$ で $d(p,q)=d(\overline{p},\overline{q})$，$d(p,r)=d(\overline{p},\overline{r})$，$\angle qpr=\angle\overline{q}\,\overline{p}\,\overline{r}$ なるものをとると

$$d(q,r)\leq d(\overline{q},\overline{r})$$

が成り立つ．

この定理は曲率が k 以上の多様体における三角形が $M^2(k)$ における三角形よりも太っているということを定式化したものである．

最後に，$k<0$ のときの $M^2(k)$ における余弦定理を述べて定理の証明に移る．

余弦定理．$k<0$ のとき，$M^2(k)$ における測地三角形 $\triangle$ABC に対して，次が成り立つ．

$$\cosh\bigl(\sqrt{|k|}\,a\bigr)=\cosh\bigl(\sqrt{|k|}\,b\bigr)\cosh\bigl(\sqrt{|k|}\,c\bigr)-\sinh\bigl(\sqrt{|k|}\,b\bigr)\sinh\bigl(\sqrt{|k|}\,c\bigr)\cos\theta.$$

ただし，a，b，c はそれぞれ点 ABC の対辺の長さであり，$\theta=\angle$BAC である．

3. 定理の証明

はじめに，$C>0$ と $0\leq\alpha\leq2$ に対して，$\epsilon\leq1/40$ かつ

$$\cosh^2\bigl(4\sqrt{2^\alpha C}\,\epsilon\bigr)-\cosh\bigl(6\sqrt{2^\alpha C}\,\epsilon\bigr)<0\quad(3.1)$$

を満たす小さな定数 $\epsilon=\epsilon(C,\alpha)>0$ をとる．

臨界点理論により，任意の点 $x\in M$ が，$r:=d(p,x)$ が十分大きいとき d_p の臨界点でないことを示せばよい．そこで，$r>1$ と仮定する．

半直線の条件（1.2）より，p を始点とする半直線 $\gamma:[0,\infty)\to M$ で

$$s:=d(x,\gamma)<\epsilon\gamma^{\alpha/2}\quad(3.2)$$

を満たすものが存在する．ここで，点 x から p への最短測地線 $\sigma_1:[0,d(x,p)]\to M$ と点 x から $q:=\gamma(2r)$ への最短測地線 $\sigma_2:[0,d(x,q)]\to M$ を勝手に選び，

$$\tilde{p}=\sigma_1(4\epsilon r^{\alpha/2}),\quad \tilde{q}=\sigma_2(4\epsilon r^{\alpha/2})$$

とおく．このとき，$\tilde{p}$ から $\tilde{q}$ へのどんな最短測地線 $c:[0,d(\tilde{p},\tilde{q})]\to M$ を考えても，ϵ が十分小さいと $c(t)$ は $M\setminus B_{r/2}(p)$ に含まれる．つまり，

補題． $\epsilon\le 1/40$ のとき，$\triangle x\tilde{p}\tilde{q}$ は $M\setminus B_{r/2}(p)$ に含まれる．

証明． ある t について，$c(t)\in B_{r/2}(p)$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}8\epsilon r^{\alpha/2}&=d(\tilde{p},x)+d(x,\tilde{q})\\&\ge d(\tilde{p},\tilde{q})\\&\ge d(\tilde{p},p)-d(p,c(t))-d(c(t),\tilde{q})\\&>\left(r-4\epsilon r^{\alpha/2}\right)-r/2-8\epsilon r^{\alpha/2}\\&=r/2-12\epsilon r^{\alpha/2}.\end{aligned}$$

よって，

$$\epsilon>\frac{1}{40}r^{1-\alpha/2}>\frac{1}{40}.$$

これは矛盾である．□

次に，曲率条件（1.1）より

$$k_p(r/2)\ge-\frac{C}{(1+r/2)^\alpha}>-\frac{2^\alpha C}{r^\alpha}$$

であるから，ヒンジ $\left(\sigma_1|_{[0,4\epsilon r^{\alpha/2}]},\sigma_2|_{[0,4\epsilon r^{\alpha/2}]}\right)$ に対するトポノゴフの比較定理および $M^2(-2^\alpha C/r^\alpha)$ における余弦定理を使うと

$$\begin{aligned}&\cosh\left(\sqrt{\frac{2^\alpha C}{r^\alpha}}\,d(\tilde{p},\tilde{q})\right)\\&\le\cosh^2\left(\sqrt{\frac{2^\alpha C}{r^\alpha}}\,4\epsilon r^{\alpha/2}\right)\\&\quad-\sinh^2\left(\sqrt{\frac{2^\alpha C}{r^\alpha}}\,4\epsilon r^{\alpha/2}\right)\cos\theta\end{aligned}\tag{3.3}$$

が成り立つことがわかる．ここで，点 x における σ_1 と σ_2 の角度を $\theta=\angle(\sigma_1'(0),\sigma_2'(0))$ とおいた．

さて，$d(x,m)=d\big(x,\gamma((0,2r))\big)$ となる点 $m\in\gamma((0,2r))$ をとると，(3.2) より，

$$\begin{aligned}d(\tilde{p},\tilde{q})&\ge d(p,q)-d(p,\tilde{p})-d(q,\tilde{q})\\&=[d(p,m)+d(m,q)]\\&\qquad-[d(p,x)-d(\tilde{p},x)]\\&\qquad-[d(x,q)-d(x,\tilde{q})]\\&=8\epsilon r^{\alpha/2}+[d(p,m)-d(p,x)]\\&\qquad+[d(m,q)-d(x,q)]\\&\ge 8\epsilon r^{\alpha/2}-2d(x,m)\\&>8\epsilon r^{\alpha/2}-2\epsilon r^{\alpha/2}\\&=6\epsilon r^{\alpha/2}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

したがって，(3.3)，(3.4) より，

$$\begin{aligned}&\cosh\left(\sqrt{\frac{2^\alpha C}{r^\alpha}}\,6\epsilon r^{\alpha/2}\right)\\&\le\cosh\left(\sqrt{\frac{2^\alpha C}{r^\alpha}}\,d(\tilde{p},\tilde{q})\right)\\&\le\cosh^2\left(4\sqrt{2^\alpha C}\,\epsilon\right)-\sinh^2\left(4\sqrt{2^\alpha C}\,\epsilon\right)\cos\theta.\end{aligned}$$

最後に，ϵ が十分小さいこと（3.1）を使うと

$$\begin{aligned}&\sinh^2\left(4\sqrt{2^\alpha C}\,\epsilon\right)\cos\theta\\&\quad\le\cosh^2\left(4\sqrt{2^\alpha C}\,\epsilon\right)-\cosh\left(6\sqrt{2^\alpha C}\,\epsilon\right)\\&\quad<0\end{aligned}$$

となることがわかる．よって，$\cos\theta<0$，すなわち，

$$\theta>\frac{\pi}{2}.$$

点 x から p への最短測地線 σ_1 は任意だったから，点 x が d_p の臨界点でないことがわかった．□

謝辞

投稿を勧めてくださり，執筆に関する助言をして頂いた理工学部基礎理学科の福島美智子教授，阿部正典准教授に感謝致します．

文献

(1) J. Cheeger, D. Gromoll (1971/72), The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature, J. Differential Geom. **6**, 119－128.

(2) U. Abresch (1985), Lower curvature bounds, Toponogov's theorem and bounded topology I, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **18**, 651－670.

(3) M. Gromov (1982), Volume and bounded cohomology, Publ. Math. IHES **56**, 5－99.

(4) Q. Wang, C. Xia (2006), Topological rigidity theorems for open manifolds, Math. Nachr. **279**, no. 7, 805－911.

(5) J. Sha, Z. Shen (1997), Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and quadratically nonnegatively curved infinity, Amer. J. Math. **119**, 1399－1404.

(6) K. Grove, K. Shiohama (1977), A generalized sphere theorem, Ann. of Math. (2) **106**, 201－211.

(7) 酒井隆 (1992), リーマン幾何学 (数学選書 11), 裳華房.